Ejercicios de Álgebra

Ejercicio nº 1

En una granja se venden pollos, pavos y perdices a razón de 2,00, 1,50 y 4,00 euro/kilo, respectivamente. En cierta semana los ingresos totales de la granja ascendieron a 5700 euros. Se sabe que la cantidad de pollo vendida superó en 100 kilos a la de pavo y que se vendió de perdiz la mitad que de pavo. Se pide:

a) plantear un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad vendida de cada tipo de carne
b) expresar matricialmente el problema
c) ¿Cuántos kilos se vendieron de cada tipo?
d) Calcular el determinante de la matriz asociada al sistema
e) ¿Qué rango tiene la matriz ampliada?

Ejercicio nº 2

Hallar el valor del siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº3

Discutir para los distintos valores del parámetro n el sistema:

$$\begin{cases} nx + ny - nz = 1 \\ nx + y - nz = 1 \end{cases}$$

Ejercicio nº4

Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente, resolviéndolo para cuando sea indeterminado:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases}$$

Ejercicio nº5

Calcular los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad y \quad G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº6

Comprobar que $|AB| = |A||B|$, dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº7
Dado el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Discutir si existe algún valor del parámetro a para el cual el sistema sea compatible indeterminado.

Ejercicio nº8

Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & a \\ x & & & + & a^2 z & = & 2a+1 \\ x & - & y & + & a(a-1)z & = & 2a \end{array}\right\}$$

(a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real *a*.

(b) Resuélvase dicho sistema para *a* = 3..

Problema nº9
Para cada valor del número real t, se considera la matriz:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar todos los valores de t para los que la matriz A (t) no tiene inversa.
b) Hallar la inversa de A (t) cuando t=-1.

Problema nº10
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:
a) la matriz inversa de las matrices I + A e I – A
b) la expresión (I + A)(I – A)–1

Ejercicio nº11
Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

, donde a, b y c no son nulos.
a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
b) Calcula el rango de A y razona si la matriz tiene inversa.

Ejercicio nº12

Demostrar que se verifica la igualdad $A^3 + I = N$.

Justificar que A es inversible y hallar A–I.

Calcular razonadamente A10.

Todo ello siendo I la matriz identidad, N la matriz nula y

Ejercicio nº13

Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº14

Determina A en cada una de las expresiones que siguen:

a)

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2A + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}A$$

b)

$$\frac{1}{2}A - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}A + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº15

Discutir el siguiente sistema, según los distintos valores que pueda tomar el parámetro a y resolverlo cuando sea compatible:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + az &= 4 \\ x + z &= 2 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio nº16

Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 17.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº18

a) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$S \; : \; \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x-y+kz=9 \\ x-y-6z=5 \end{cases}$$

b) Si el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_3$ y $\vec{C}_4$.

Ejercicio nº19

Sea el sistema

$$\begin{cases} -x+\lambda y+2z=\lambda \\ 2x+\lambda y-z=2 \\ \lambda x-y+2z=\lambda \end{cases}$$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.
b) Resolver el sistema para λ = -1.
c) Resolver el sistema para λ = 2.

Ejercicio nº20

a) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.
b) Para λ = 2, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.
c) Resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº21

Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ (\lambda-1)x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & (\lambda-1)y & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

donde λ es un número real.

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) Resolverlo para λ = 0.

c) Resolverlo para λ = 3.