EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

Ejercicio nº 1

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

(a) Compruébese que *B* es la inversa de *A*.

(b) Calcúlese la matriz $(A - 2I)^2$.

(c) Calcúlese la matriz *X* tal que $AX = B$.

Ejercicio nº 2

Calcula la matriz X, tal que XB + 2A = C; siendo

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ -2 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

Ejercicio nº 3

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

a) Calcular A^{-1}.

b) Resolver el sistema $A\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\ -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}21\\ 24\end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/10 & 1 & 0\\ 1/10 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calcúlese la matriz $A + A^2$.

Ejercicio nº 5

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

(a) Determínese si *A* y *B* son invertibles y, en su caso, calcúlese la matriz inversa.

(b) Resuélvase la ecuación matricial $XA - B = 2I$, siendo *I* la matriz identidad de orden tres.

(c) Calcúlese A^{86}.

Ejercicio nº 6

Hallar, en función de *a*, el valor del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 7

Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} b-1 & b & b & b \\ b & b-1 & b & b \\ b & b & b-1 & b \\ b & b & b & b-1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio nº 8

Una empresa de carpintería dispone de dos naves A y B donde se fabrican sillas y mesas en tres tipos de acabados: calidad extra E, calidad media M, y calidad inferior I. Ambas naves tienen la misma producción mensual. La cantidad de sillas producidas mensualmente, en cada una de las naves, es de 100 del tipo E, 150 del M y 200 del tipo I; la producción mensual de mesas es de 100 de clase E, 50 de clase M y 300 de clase I. Se sabe que el porcentaje de sillas y de mesas defectuosas es, en la nave A, de 0,01 para los muebles de calidad E, de 0,02 para la calidad M, y de 0,03 para la calidad I, mientras que en la nave B los porcentajes son 0,02 para la clase E, 0,04 para la M, y 0,01 para la clase I. Se pide:

i. Obtener la matriz que representa la producción de sillas y mesas, de calidad extra, media o inferior en una de las naves.
ii. Obtener la matriz que representa el número de sillas y mesas defectuosas, en las calidades E, M, I, procedentes de cada una de las naves.
iii. La matriz que da el número total de sillas y de mesas defectuosas para cada calidad.

Ejercicio nº 9

Se considera el siguiente sistema lineal:

$$mx + my = 6$$
$$x + (m - 1)y = 3$$

(a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real *m*.

(b) Resuélvase dicho sistema para $m = 2$.

Ejercicio nº 10

Se considera el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - y & = & a \\ x + a^2 z & = & 2a+1 \\ x - y + a(a-1)z & = & 2a \end{array}\right\}$$

- (a) Discútase el sistema según los distintos valores del parámetro real *a*.
- (b) Resuélvase dicho sistema para *a* = 3.

Ejercicio nº 11

Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax + y = 3 \\ x + ay = 0 \end{array}\right\}$$

i) Discútelo según los valores del parámetro a.
ii) Resuélvelo para el caso a= 2.

Ejercicio nº 12

Siendo *a* un número real cualquiera, se define el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +2y & -az & = & 1 \\ & -y & +z & = & 0 \\ ax & & +z & = & a \end{array}\right\}$$

(a) Discútase dicho sistema en función del valor de *a*.
(b) Encuéntrense todas sus soluciones para *a* = 1.

Ejercicio nº 13

La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre, madre e hijo es 80 años, y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre. ¿Cuántos años tienen el padre, la madre y el hijo en la actualidad?

Ejercicio nº 14

En una tienda de alimentación hay tres productos en oferta: harina, vinagre y botes de guisantes. Un cliente compró un paquete de harina, cuatro botellas de vinagre y dos botes de guisantes, por un importe de 200 ptas., otro cliente compró un bote de guisantes, dos botellas de vinagre y devolvió un paquete de harina que tenía insectos en su interior, pago 70 ptas., y un tercer cliente compró tres botellas de vinagre y devolvió dos paquetes de harina, pagando 20 ptas. ¿Cuáles eran los precios de los tres productos? ¿Cómo sería el sistema si el tercer cliente hubiera comprado dos botes de guisantes y 4 botellas de vinagre y hubiera devuelto dos paquetes de harina y le hubieran cobrado 150 ptas.?

Ejercicio nº 15

Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto *A*, un 6% en el producto *B* y un 5% en el producto *C*. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de *A*, un 10% sobre el precio inicial de *B* y un 6% sobre el precio inicial de *C*.

Ejercicio nº 16

Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto *A*, dos *B* y tres *C*, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos *A*, uno *B* y cinco *C* en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto *A*, uno *B* y uno *C*, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Calcúlese el precio de cada producto antes de las ofertas.

Ejercicio nº 17

Calcular el rango de la matriz A, para todos los distintos valores de t

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Determínese el número de bandejas de cada clase que debe vender para que los ingresos obtenidos sean máximos. Calcúlense dichos ingresos.

Ejercicio nº 18

A una reunión del Vaticano asisten 25 personas, de las cuales 20 son arzobispos, 12 son cardenales, 17 son italianos, 8 son arzobispos y cardenales, 12 son arzobispos italianos y 11 son cardenales italianos. Calcular:

a) Cuantos italianos son cardenales y arzobispos a la vez.
b) Cuantos italianos son arzobispos o cardenales, pero no ambos a la vez.

Ejercicio nº 19

Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene dos naves A y B.
En la nave A se invierten 7 días-operario por camión y 2 días-operario por coche, mientras que en la nave B se emplea 3 días-operario tanto para los coches para los camiones.
Por limitación de mano de mano de obra y maquinaria la nave A dispone de 300 días-operarios y la B 270 días-operarios. El beneficios por camión es 36.000€ y de 12.000€ por coche. Calcular cuantos coches y cuantos camiones habrá que realizar para maximizar el beneficio.

Ejercicio nº 20

Dada la función z: 2x + 3y sujeta a las siguientes restricciones:

$$3x + 2y \geq 12$$
$$x + 2y \geq 8$$
$$y \geq -1$$

Estudiar cual su máximo y su mínimo con estas condiciones.

Ejercicio nº 21

Representa gráficamente el recinto del plano que cumple las restricciones $\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ y \geq -1 \end{cases}$

e indica si en ese recinto la función z(x,y) = 2x – y alcanza el máximo o el mínimo.

Ejercicio nº 22
Una fábrica se dedica a la confección de pantalones y camisas. Para hacer un pantalón se emplean 4 horas operario y para una camisa 3 horas operario. La fábrica tiene 10 trabajadores que trabajan 8 horas diarias.

Por motivos de mercado, cada día, deben realizarse al menos el doble de camisas que pantalones, y un mínimo de 10 camisas. Si los pantalones dejan un beneficio de 12 € la unidad y las camisa de 9€. ¿Qué cantidad de pantalones y camisas habrá que hacer diariamente parra obtener máximos beneficios?

Ejercicio nº 23

Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5€ y por cada pulsera gana 4 €. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

(a) Exprésense la función objetivo y las restricciones del problema.

(b) Represéntese gráficamente el recinto definido.

(c) Obténgase el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

Ejercicio nº 24

Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 Kilocalorías por cada 100 g de ingrediente, mientras que el ingrediente B contiene 15 g de grasas y 100 Kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 150 pts por cada 100 g del ingrediente A y de 200 pts por cada 100 g del ingrediente B.
El menú a diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y al menos 110 Kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada ingrediente a emplear en el menú de manera que su coste sea lo más reducido posible.

(a) Indíquese la expresión de las restricciones y la función objetivo del problema.

(b) Represéntese gráficamente la región delimitada por las restricciones.

(c) Calcúlese el porcentaje óptimo de cada ingrediente a incluir en el menú.